数理解析研究所講究録
715 巻 1990 年 64-78

Réciprocité de Frobenius pour des groupes de Lie résolubles exponentiels

Hidénori FUJIWARA

Faculté de Technologie à Kyushu, Université de Kinki

§1. Désintégration d'une représentation induite

Soit G un groupe de Lie résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Cela signifie que l'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur G: nous le notons $G = \exp \mathfrak{g}$. Nous commençons cette note par nous intéresser aux représentations monomiales de G. Soient H un sous-groupe connexe de G et χ son caractère unitaire. Notre but est de décrire dans le cadre de la méthode des orbites la désintégration centrale canonique de la représentation induite $\tau = \mathrm{ind}_H^G \chi$. Soit $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H. Alors il existe $f \in \mathfrak{g}^*$, une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$, telle que f s'annule sur l'algèbre dérivée $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ de $\mathfrak{h}$ et que χ s'écrive $\chi(\exp X) = e^{if(X)}$ ($i = (-1)^{1/2}$, $X \in \mathfrak{h}$). Dans cette situation, χ se notera χ_f. Après que l'on avait vigoureusement étudié le cas essentiel où $\mathfrak{h}$ était une polarisation en f, vers '72 Grélaud [12] et Quint [22] ont mis fin au cas où $\mathfrak{h}$ était un idéal de $\mathfrak{g}$.

De plus, Quint a laissé des conjectures suivantes. Soit μ une mesure positive finie sur l'espace affine $\Xi = f + \mathfrak{h}^\perp$, $\mathfrak{h}^\perp$ désignant l'annihilateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}^*$, équivalente à la mesure de Lebesgue sur Ξ. On regarde μ comme une mesure sur $\mathfrak{g}^*$ et prend son image ν par l'application de Kirillov-Bernat $\theta = \theta_G: \mathfrak{g}^* \to \hat{G}$, le dual unitaire de G. $\hat{G}$ s'obtient comme l'espace des orbites coadjointes $\mathfrak{g}^*/G$ de G au moyen de l'isomorphisme borélien induite $\bar{\theta} = \bar{\theta}_G: \mathfrak{g}^*/G \to \hat{G}$ (cf. [4], [12]). Pour $\pi \in \hat{G}$ on note $\Omega(\pi)$ l'orbite associée. Soit $Z(\Xi)$ l'ensemble des $\zeta \in \Xi$ telles que l'orbite $G \cdot \zeta$ atteint la dimension maximum parmi les orbites rencontrant Ξ.

Conjectures de Quint [22]: (i) Pour toute $\zeta \in Z(\Xi)$, chaque composante connexe de $\Xi \cap G \cdot \zeta$ est une variété différentielle de dimension supérieure ou égale à $1/2 \dim G \cdot \zeta$.

(ii) $\tau = \mathrm{ind}_H^G \chi_f = \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi)\pi d\nu(\pi)$. Ici la multiplicité $m(\pi)$ est égale au nombre des composantes connexes de $\Xi \cap \Omega(\pi)$ si chaque composante est une variété de dimension $1/2\dim \Omega(\pi)$, sinon $m(\pi) = \infty$.

Depuis ont été faits des travaux fondamentaux, par Benoist [2],[3] pour le cas symétrique et par Corwin-Greenleaf/Grélaud [7],[13] pour le cas nilpotent, établissant les conjectures de Quint à condition d'une petite modification sans importance: dans (i), "toute $\zeta \in Z(\Xi)$" doit être remplacé par "μ-presque toute $\zeta \in \Xi$". On voit encore des résultats dus à Lipsman [15],[16],[17] qui contiennent la désintégration de τ pour le cas complètement résoluble. En plus ils ont montré que la multiplicité $m(\pi)$ était retrouvée comme le nombre des H-orbites incluses dans $\Xi \cap \Omega(\pi)$. Ici nous nous proposons d'établir les conjectures.

Soient $G = \exp \mathfrak{g}$ et $f \in \mathfrak{g}^*$. On note $S(f,\mathfrak{g})$ l'ensemble des sous-algèbres $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ subordonnées à f, c'est-à-dire que $\mathfrak{h}$ est un sous-espace totalement isotrope pour la forme bilinéaire alternée B_f sur $\mathfrak{g}$ définie par $B_f(X,Y) = f([X,Y])$.

Théorème 1 ([10]). Soient $\mathfrak{k}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, $f \in \mathfrak{k}^*$ et $\mathfrak{h} \in S(f,\mathfrak{k})$. On note $\mathfrak{h}^{\perp,\mathfrak{k}}$ l'annihilateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{k}^*$, μ mesure positive finie sur $\mathfrak{k}^*$ équivalente à la mesure de Lebesgue sur $f + \mathfrak{h}^{\perp,\mathfrak{k}}$ et ν l'image de μ par l'application canonique de $\mathfrak{k}^*$ sur l'espace des G-orbites $\mathfrak{k}^*/G$. Pour ν-presque toutes les orbites $\Omega \in \mathfrak{k}^*/G$;

(i) Chaque composante connexe C de $(f + \mathfrak{h}^{\perp,\mathfrak{k}}) \cap \Omega$ est une variété.

(ii) L'espace tangent de C au point $\zeta \in C$ est égal à $\mathfrak{g} \cdot \zeta \cap \mathfrak{h}^{\perp,\mathfrak{k}}$.

(iii) Si l'on désintègre μ par rapport à ν, $\mu = \int \mu_\Omega d\nu(\Omega)$, la mesure de fibre μ_Ω restreinte à une carte $(U; x_1,\cdots,x_m)$ de C est équivalente à $dx_1\cdots dx_m$.

Corollaire 1. Soient $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{h} \in S(f,\mathfrak{g})$ et $\Xi = f + \mathfrak{h}^{\perp}$.

(i) Pour ν-presque toutes les orbites coadjointes $\Omega \in \mathfrak{g}^*/G$, le support de la mesure μ_Ω est égal à $\Xi \cap \Omega$ tout entier.

(ii) Pour ν-presque toutes les orbites coadjointes $\Omega \in \mathfrak{g}^*/G$, chaque composante connexe C de $\Xi \cap \Omega$ est une variété ayant la dimension supérieure ou égale à 1/2 dim Ω.

(iii) On a dim C = 1/2dim Ω si et seulement si $H\cdot\zeta = C$ pour toute $\zeta \in C$. S'il en est ainsi, $\mathfrak{h} + \mathfrak{g}(\zeta)$ est un sous-espace lagrangien pour B_ζ.

Pour donner la désintégration des représentations monomiales de G, notre méthode sera différente de celle de Lipsman [17]. Dans ce qui suit, on confondra parfois les classes d'équivalence des représentations unitaires avec leurs représentants et liera deux représentations équivalentes par le symbole $\simeq$ ou même par le signe d'égalité. Avant d'énoncer le théorème, on se prépare un lemme concernant des groupes à petite dimension.

Lemme. (i) Soit $G = \exp \mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_2 = \langle X,Y\rangle_R = RX + RY$: $[X,Y] = Y$. Soient $f \in \mathfrak{g}_2^*$, $\mathfrak{h} = RX$ et $H = \exp \mathfrak{h}$. Alors $\mathrm{ind}_H^G \chi_f \simeq \mathrm{ind}_{H'}^G \chi_{Y^*} + \mathrm{ind}_{H'}^G \chi_{-Y^*}$ avec $H' = \exp(RY)$.

(ii) Soit $G = \exp \mathfrak{g}_3(\alpha)$, $\mathfrak{g}_3(\alpha) = \langle T,Y_1,Y_2\rangle_R$: $[T,Y_1] = Y_1 - \alpha Y_2$, $[T,Y_2] = Y_2 + \alpha Y_1$ $(0 \neq \alpha \in R)$. Soient $f \in \mathfrak{g}_3(\alpha)^*$, $\mathfrak{h} = RT$ et $H = \exp \mathfrak{h}$. Alors

$$\mathrm{ind}_H^G \chi_f \simeq \int^{\oplus}_{[0,\,2\pi)} \mathrm{ind}_{H'}^G \chi_{\hat\theta}\, d\theta$$

avec $H' = \exp(RY_1 + RY_2)$, $\hat\theta = (\cos\theta)Y_1^* + (\sin\theta)Y_2^* \in \mathfrak{g}_3(\alpha)^*$.

(iii) Soit $G = \exp \mathfrak{g}_4$, $\mathfrak{g}_4 = \langle T,X,Y,Z\rangle_R$: $[X,Y] = Z$, $[T,X] = -X$, $[T,Y] = Y$. Soient $f = \alpha T^* + \beta Z^* \in \mathfrak{g}_4^*$ $(\beta \neq 0)$, $\mathfrak{h} = \langle T,X,Z\rangle_R$ et $H = \exp \mathfrak{h}$. Alors $\mathrm{ind}_H^G \chi_f \simeq \mathrm{ind}_{H'}^G \chi_f$ avec $H' = \exp \mathfrak{h}'$, $\mathfrak{h}' = \langle T,Y,Z\rangle_R$.

(iv) Soit $G = \exp \mathfrak{g}_6$, $\mathfrak{g}_6 = \langle T,X_1,X_2,Y_1,Y_2,Z\rangle_R$: $[X_i,Y_j] = \delta_{ij}Z$ $(1 \leq i,j \leq 2)$, $[T,X_1] = -X_1 - \alpha X_2$, $[T,X_2] = -X_2 + \alpha X_1$, $[T,Y_1] = Y_1 - \alpha Y_2$, $[T,Y_2] = Y_2 + \alpha Y_1$ $(0 \neq \alpha \in R)$. Soient $f = \beta T^* + \gamma Z^* \in \mathfrak{g}_6^*$ $(\gamma \neq 0)$, $\mathfrak{h} = \langle T,X_1,X_2,Z\rangle_R$ et $H = \exp \mathfrak{h}$. Alors $\mathrm{ind}_H^G \chi_f \simeq \mathrm{ind}_{H'}^G \chi_f$ avec $H' = \exp \mathfrak{h}'$, $\mathfrak{h}' = \langle T,Y_1,Y_2,Z\rangle_R$.

Revenant au cas général, nous reprenons les notations précédentes: soient $G = \exp \mathfrak{g}$ un groupe de Lie résoluble exponentiel, $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{h} \in S(f,\mathfrak{g})$, $H = \exp \mathfrak{h}$ et $\tau = \mathrm{ind}_H^G \chi_f$. Soient encore μ une mesure positive finie sur $\Xi = f + \mathfrak{h}^\perp \subset \mathfrak{g}^*$ équivalente à la mesure de Lebesgue et ν son image par l'application θ de Kirillov-Bernat.

Théorème 2 ([10]). La désintégration de τ s'écrit

$$\tau \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi)\pi d\nu(\pi)$$

avec la fonction de multiplicités donnée à la façon suivante: $m(\pi)$ est le nombre des composantes connexes de $\Xi \cap \Omega(\pi)$ si chaque composante est une variété de dimension égale à $1/2\dim \Omega(\pi)$. Lorsque cette condition n'est pas remplie, $m(\pi)$ est égale à $+\infty$. En tout cas $m(\pi)$ s'obtient comme le nombre des H-orbites contenues dans $\Xi \cap \Omega(\pi)$.

Les groupes de Lie résolubles exponentiels étant monomiales, le théorème 2 nous permet de connaître la désintégration centrale canonique des représentations induites. Soit σ une représentation unitaire irréductible d'un sous-groupe connexe H de G. Soient $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H et $p = p(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ l'application restriction. Il existe sur sous-variété $p^{-1}(\Omega_K(\sigma))$ de $\mathfrak{g}^*$ une mesure μ bien déterminée par la mesure canonique sur $\Omega(\sigma) = \Omega_K(\sigma)$ et par la mesure de Lebesgue sur l'annihilateur $\mathfrak{h}^\perp$(cf. [15]). On prend une mesure finie $\tilde{\mu}$ sur $\mathfrak{g}^*$ équivalente à μ regardée comme une mesure sur $\mathfrak{g}^*$, et considère son image $\nu = \nu^G{}_\sigma = (\theta_G)_*(\tilde{\mu})$ sur $\hat{G}$.

Théorème 3 ([11]). La représentation induite $\mathrm{ind}_H^G\ \sigma$ de G se désintègre comme suit:

$$\mathrm{ind}_H^G\ \sigma \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi)\pi d\nu(\pi),$$

où la multiplicité $m(\pi)$ est donnée encore par le nombre des H-orbites contenues dans $\Omega_G(\pi) \cap p^{-1}(\Omega_H(\sigma))$.

§2. Désintégration d'une représentation restreinte

Soient π une représentation unitaire irréductible de G et H un sous-groupe connexe de G. Nous allons décrire la désintégration centrale canonique de la restriction de π à H, notée $\pi|_H$, et observer une réciprocité de Frobenius dans cette situation.

Dans le cadre de la méthode des orbites, le problème a été pris par Kirillov [

14], pleinement étudié par Corwin-Greenleaf [7] pour le cas nilpotent et par Lipsman [15],[18] pour le cas complètement résoluble. On introduit l'orbite coadjointe $\Omega_G(\pi) \subset \mathfrak{g}^*$ de G déterminée par π et une mesure finie μ_π sur $\mathfrak{g}^*$ équivalente à la mesure canonique sur $\Omega_G(\pi)$ (cf. [4]), regardée comme une mesure sur $\mathfrak{g}^*$. Enfin on considère la mesure $\nu = \nu_H^\pi = (\theta_H \cdot p)_*(\mu_\pi)$, l'image de μ_π par l'application $\theta_H \cdot p : \mathfrak{g}^* \to \hat{H}$.

Théorème 4 ([11]). On a

$$\pi|_H \simeq \int_{\hat{H}}^{\oplus} m(\sigma)\sigma d\nu(\sigma),$$

où la multiplicité $m(\sigma)$ est donnée par le nombre des H-orbites contenues dans $\Omega_G(\pi) \cap p^{-1}(\Omega_H(\sigma))$.

Soient π_j ($j = 1,2$) deux représentations unitaires irréductibles de G. Le produit de Kronecker extérieur de π_1 et de π_2, noté $\pi_1 \times \pi_2$, correspond à l'orbite $\Omega_{G\times G}(\pi_1 \times \pi_2) = (\Omega_G(\pi_1), \Omega_G(\pi_2)) \subset \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*$. On identifie G au sous-groupe de $G \times G$ constitué par les éléments diagonaux.

Corollaire 2. Soit $p = p(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}, \mathfrak{g}) : \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$. Alors

$$\pi_1 \otimes \pi_2 \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi)\pi d\nu(\pi),$$

où $\nu = (\theta_G \cdot p)_*(\mu_{\pi_1 \times \pi_2})$ et où $m(\pi)$ s'obtient par le nombre des G-orbites incluses dans $(\Omega_G(\pi_1), \Omega_G(\pi_2)) \cap p^{-1}(\Omega_G(\pi))$.

Corollaire 3. La réciprocité de Frobenius s'établit dans ces situations.

Cette réciprocité avait été obtenue presque partout dans [19]. Ce qui est nouveau ici, c'est, comme déjà remarqué dans [7], de la constater partout.

§3. Problèmes et examples

Concernant notre représentation monomiale $\tau = \mathrm{ind}_H^G \chi_f$, nous laissons deux questions qui remontent à Penney [21]. Pour une représentation unitaire ρ de G, on notera $H(\rho)$ son espace de Hilbert, $H(\rho)^{\infty}$ l'espace des vecteurs C^{∞} muni de la topologie habituelle, et $H(\rho)^{-\infty}$ son antidual. Etant donnés un sous-groupe fermé K de G etson caractère c, nous posons

$$(H(\rho)^{-\infty})^{K,c} = \{a \in H(\rho)^{-\infty};\ \rho(k)a = c(k)a,\ k \in K\}.$$

Reprenons notre représentation monomiale

$$\tau \simeq \mathrm{ind}_H^G \chi_f = \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi)\pi d\nu(\pi).$$

En désignant par e l'élément neutre de G, par Δ_G la fonction module de G, nous voyons que la mesure de Dirac

$$\delta_\tau:\ H(\tau)^{\infty} \ni \phi \mapsto \overline{\phi(e)} \in \mathbf{C}$$

définit un élément de $(H(\tau)^{-\infty})^{H,\chi_f\Delta_{H,G}^{1/2}}$, où $\Delta_{H,G} = \Delta_H/\Delta_G$. Alors, suivant la désintégration de τ, δ_τ s'écrit

$$\delta_\tau = \int_{\hat{G}}^{\oplus} \left(\sum_{k=1}^{m(\pi)} a_\pi^k\right) d\nu(\pi)$$

avec $a_\pi^k \in (H(\pi)^{-\infty})^{H,\chi_f\Delta_{H,G}^{1/2}}$ (cf. [5],[21]). Ce qui veut dire que, pour toute $\phi \in C_c^{\infty}(G)$,

$$\phi_H{}^f(e) = \int_{\hat{G}} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(\phi)a_\pi^k, a_\pi^k \rangle d\nu(\pi),$$

où $\phi_H{}^f(g) = \int_H \phi(gh)\chi_f(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)dh$ avec une mesure de Haar dh sur H.

Cela posé, voici nos questions.

① Réciprocité: Peut-on choisir dim $(H(\pi)^{-\infty})^{H,\chi_f\Delta_{H,G}^{1/2}}$ pour la multiplicité $m(\pi)$?

② Formule de Plancherel concrète: Explicitez les a_π^k intervenant dans la désintégration de δ_τ.

Depuis que les travaux de Benoist [2],[3] nous ont incités à étudier ces questions, nous en avons envisagé certains cas (cf. [8],[9]). Dans toute la suite on va y ajouter encore quelques exemples.

Exemple 1. $G = G_3(\alpha) = \exp \mathfrak{g}_3(\alpha)$; (T, Y_1, Y_2): $[T, Y_1] = Y_1 - \alpha Y_2$, $[T, Y_2] = \alpha Y_1 + Y_2$. Soient $f = Y_1^* \in \mathfrak{g}_3(\alpha)^*$ et $\mathfrak{h} = \mathbf{R}Y_1$. Ici α peut être supposé négatif. Vu que

$$e^t\begin{bmatrix}\cos \alpha t & -\sin \alpha t\\ \sin \alpha t & \cos \alpha t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \lambda\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^t(\cos \alpha t - \lambda\sin \alpha t)\\ e^t(\sin \alpha t - \lambda\cos \alpha t)\end{bmatrix},$$

on a l'expression paramétrée de l'orbite passant

$$\zeta = \begin{bmatrix}1\\ \lambda\end{bmatrix} \in RY_1 + RY_2\ ;$$

$$\begin{cases} x(t) = e^t(\cos \alpha t - \lambda\sin \alpha t) & \cdots\ ① \\ y(t) = e^t(\sin \alpha t + \lambda\cos \alpha t). & \cdots\ ② \end{cases}$$

Si la ligne directe $x = 1$ est tangente à l'orbite de ζ, on voit

$$(dx/dt)_{t=0} = e^t(\cos \alpha t - \lambda\sin \alpha t - \alpha\sin \alpha t - \alpha\lambda\cos \alpha t)_{t=0} = 1 - \alpha\lambda = 0,$$

ce qui donne $\lambda = 1/\alpha$, noté λ_0. Soit t^* le premier nombre positif t vérifiant

$$e^t\{\cos \alpha t - (1/\alpha)\sin \alpha t\} = 1,$$

et la y-coordonnée du point d'intersection se notant λ_1, nous prenant

$$\zeta = \begin{bmatrix}1\\ \lambda\end{bmatrix},\ \lambda_0 \leqq \lambda < \lambda_1,$$

comme représantants des orbites qui rencontrent l'espace affine $f + \mathfrak{h}^{\perp}$, où $\mathfrak{h}^{\perp} = \{\xi \in \mathfrak{g}^*;\ \xi\,|_{\mathfrak{h}} = 0\}$.

On utilise la paramétrisation de l'orbite ① et ②, et cherche, en posant $e^t(\cos \alpha t - \lambda\sin \alpha t) = 1$, des points d'intersection avec $f + \mathfrak{h}^{\perp}$. D'où $e^t(1 + \lambda^2)^{1/2}\cos(\alpha t + \theta) = 1$ avec θ tel que $\sin \theta = \lambda(1 + \lambda^2)^{-1/2}$, $\cos \theta = (1 + \lambda^2)^{-1/2}$, ce qui entraîne $e^t(\sin \alpha t + \lambda\cos \alpha t) = (1 + \lambda^2)^{1/2}e^t\sin(\alpha t + \theta) = \tan(\alpha t + \theta)$. On en trouve les points

$$\zeta_n = \begin{bmatrix}1\\ \tan(\alpha t_n + \theta)\end{bmatrix},\ \zeta_0 = \zeta\ .$$

Choisissons arbitrairement des $g_n \in G$ tels que $g_n : \zeta \to \zeta_n$, et fabriquons l'application

$$a_n : \phi \longmapsto \oint_{H/H\cap g_n B g_n^{-1}} \overline{\phi(hg_n)\chi_f(h)}\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)d\nu(h),\ \phi \in H(\pi),$$

ce dernier n'est autre que

$$\overline{\phi(g_n)},$$

ici l'on a noté $B = \exp \mathfrak{b}$ associé à la polarisation $\mathfrak{b} = RY_1 + RY_2$, $\pi = \pi_\zeta = \mathrm{ind}_B^G \chi_\zeta$ dont l'espace se notant $H(\pi)$. On voit ainsi que a_n est un vecteur généralisé H-semi-invariant.

Par suite, pour $\phi \in C_c^\infty(G)$,

$$\langle \pi(\phi)a_n, \xi\rangle = \langle a_n, \pi(\phi^*)\xi\rangle = \overline{\pi(\phi^*)\xi(g_n)} = \int_G \phi(g)\overline{(\pi(g^{-1})\xi)(g_n)}dg$$
$$= \int_G \phi(g)\overline{\xi(gg_n)}dg = \int_G \phi(gg_n{}^{-1})\overline{\xi(g)}\Delta_G^{-1}(g)dg$$
$$= \Delta_G^{-1}(g_n)\int_{G/B} d\dot{g}\int_B \phi(\dot{g}bg_n{}^{-1})\overline{\xi(\dot{g}b)}db$$
$$= \Delta_G^{-1}(g_n)\int_{G/B} \overline{\xi(\dot{g})}d\dot{g}\int_B \phi(\dot{g}bg_n{}^{-1})\chi_\zeta(b)db.$$

Donc

$$(\pi(\phi)a_n)(g) = \Delta_G^{-1}(g_n)\int_B \phi(gbg_n{}^{-1})\chi_\zeta(b)db.$$

Ensuite

$$\langle \pi(\phi)a_n, a_n\rangle = \Delta_G^{-1}(g_n)\int_B \phi(g_nbg_n{}^{-1})\chi_\zeta(b)db = \int_B \phi(b)\chi_\zeta(g_n{}^{-1}bg_n)db$$
$$= \int_B \phi(b)\chi_{g_n.\zeta}(b)db = \int_{\mathbb{R}} \phi_H{}^f(\exp sY_2)\exp(is\tan(\alpha t_n + \theta))ds.$$

Là, pour $g \in G$, $\phi_H{}^f(g) = \int_H \phi(gh)\chi_f(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)dh$.

Les formules ① et ② entraînent, $y(t)$ s'écrivant simplement y,

$$(1 - \alpha y)(dt/d\lambda) = e^t\sin \alpha t, \qquad \text{--- ③}$$
$$(dy/d\lambda) - (y + \alpha)(dt/d\lambda) = e^t\cos \alpha t. \qquad \text{--- ④}$$

D'autre part, d'après $e^{2t} = (1 + y^2)/(1 + \lambda^2)$,

$$\{(1 + \lambda^2)(dt/d\lambda) + \lambda\}(1 + y^2)/(1 + \lambda^2) = y(dy/d\lambda). \qquad \text{--- ⑤}$$

Les égalités ③ et ④ impliquent

$$\lambda(dy/d\lambda) + (1 - \alpha y - \lambda y - \alpha\lambda)(dt/d\lambda) = y,$$
$$(dy/d\lambda) + (\lambda\alpha y - \lambda - y - \alpha)(dt/d\lambda) = 1,$$

donc $(\lambda - y)(dy/d\lambda) + (1 - \alpha\lambda)(1 + y^2)(dt/d\lambda) = 0.$

Par substitution de ⑤,

$$(\lambda - y)(dy/d\lambda) + (1 - \alpha\lambda)\{y(dy/d\lambda) - \lambda(1 + y^2)/(1 + \lambda^2)\} = 0,$$

c'est-à-dire $\lambda(1 - \alpha y)(dy/d\lambda) = \lambda(1 + \alpha\lambda)(1 + y^2)/(1 + \lambda^2).$

En conséquence, pour λ non nul,

$$(dy/d\lambda) = (1 - \alpha\lambda)(1 + y^2)/(1 - \alpha y)(1 + \lambda^2).$$

La formule à montrer revient à la suivante, $y_n = y_n(\lambda)$ désignant $\tan(\alpha t_n + \theta)$,

$$\phi_H{}^f(e) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \xi(\lambda)d\lambda\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \kappa(n)\int_{\mathbb{R}} \phi_H{}^f(\exp sY_2)\exp(is\tan(\alpha t_n + \theta))ds$$
$$= (2\pi)^{1/2}\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \xi(\lambda)\sum_{n=0}^{\infty} \kappa(n)(\phi_H{}^f)\hat{}(y_n)d\lambda$$

avec certaines fonctions mesurables $\xi(\lambda)$ et $\kappa(n) \geqq 0$, car on multiplie au besoin a_n par un scalaire, et $(\phi_H{}^f)\hat{}$ signifiant la transformée de Fourier inverse de $\phi_H{}^f \circ \exp$.

En effet, soient $\xi(\lambda) = (1 - \alpha\lambda)/2\pi(1 + \lambda^2)$ et $\kappa(n) = (1 + y_n{}^2)/|1 - \alpha y_n|$, ce qui veut dire qu'on prend $\{(1 + y_n{}^2)/|1 - \alpha y_n|\}^{1/2}a_n$. Alors,

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(\phi_H{}^f)\hat{}(y_n)\kappa(n)\Big)\xi(\lambda)d\lambda$$
$$= (2\pi)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}(\phi_H{}^f)\hat{}(y_n)(1 - \alpha\lambda)(1 + y_n{}^2)/|1 - \alpha y_n|(1 + \lambda^2)d\lambda$$
$$= (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}(\phi_H{}^f)(s)ds = (\phi_H{}^f \circ \exp)(0) = \phi_H{}^f(e).$$

Exemple 2. Soit $G = G_3(\alpha) = \exp \mathfrak{g}_3(\alpha)$ comme dans l'exemple 1. Etant donnée cette fois $\mathfrak{h} = RT$ et $f \in \mathfrak{g}_3(\alpha)^*$ arbitraire. Alors $f + \mathfrak{h}^\perp = f(T)T^* + RY_1^* + RY_2^*$ et l'on y trouve que les orbites générales ont leur représantant $\lambda(\theta) = (\cos\theta)Y_1^* + (\sin\theta)Y_2^*$ à laquelle s'associe la représentation irréductible $\pi(\theta) = \mathrm{ind}_B^G\, \chi(\theta)$ de G, où B est le sous-groupe analytique correspondant à la polarisatio $= RY_1 + RY_2$, et où $\chi(\theta)$ signifie le caractère unitaire fabriqué par $\lambda(\theta)$.

Dans ce cas, notre formule habituelle pour obtenir des vecteurs généralisés H-semi-invariants nous offre

$$a(\theta) : \phi \longmapsto \int_H \overline{\phi(h)\chi_f(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)}dh.$$

Des raisonnements analogues à ceux faits pour le cas ax+b montrent que notre a(θ) possède les propriétés requises. Il est aisé de voir, pou $\phi \in C_c^\infty(G)$,

$$(\pi(\theta)(\phi)a(\theta))(g) = \int_B \phi_H{}^f(gb)\chi(\theta)(b)db.$$

Puis

$$\langle \pi(\phi)a(\theta), a(\theta)\rangle = \int_H \chi_f(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)dh \int_B \phi_H{}^f(hb)\chi(\theta)(b)db$$
$$= \int_H dh \int_B \phi_H{}^f(hbh^{-1})\chi(\theta)(b)db = \int_H \Delta_G(h)dh \int_B \phi_H{}^f(b)\chi_\zeta(b)db$$
$$= \int_R e^{2t}dt \int_B \phi_H{}^f(b)\chi_\zeta(b)db,$$

avec la notation $\zeta = h\cdot\lambda(\theta) = e^t\cos(\alpha t + \theta)Y_1^* + e^t\sin(\alpha t+\theta)Y_2^*$, $h = \exp tT$.

Ceci posé,

$$(2\pi)^{-2}\int_0^{2\pi} \langle \pi(\theta)(\phi)a(\theta), a(\theta)\rangle d\theta = (2\pi)^{-2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_R e^{2t}dt \int_{R^2} \phi_H{}^f(\exp(b_1Y_1 + b_2Y_2))\exp(ie^t(b_1\cos(\alpha t + \theta) + b_2\sin(\alpha t + \theta)))db_1db_2.$$

Appliquons le changement de variables

$$\begin{cases} x = e^t\cos(\alpha t + \theta) \\ y = e^t\sin(\alpha t + \theta), \end{cases}$$

dont le Jacobian est

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\theta)} = \begin{vmatrix} e^t\cos(\alpha t + \theta) - \alpha e^t\sin(\alpha t + \theta) & -e^t\sin(\alpha t + \theta) \\ e^t\sin(\alpha t + \theta) + \alpha e^t\cos(\alpha t + \theta) & e^t\cos(\alpha t + \theta) \end{vmatrix} = e^{2t},$$

$$dxdy = e^{2t}dtd\theta.$$

On en déduit que

$$(2\pi)^{-2}\int_0^{2\pi} \langle \pi(\theta)(\phi)a(\theta), a(\theta)\rangle d\theta = (2\pi)^{-2}\int_{R^2} dxdy \int_R (\phi_H{}^f)^*(b_1, b_2)\times \exp(i(xb_1 + yb_2))db_1db_2 = (\phi_H{}^f)^*(0,0) = \phi_H{}^f(e),$$

où $(\phi_H{}^f)^*(b_1, b_2) = \phi_H{}^f \circ \exp(b_1Y_1 + b_2Y_2)$.

Exemple 3. $G = \exp \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} = RT + RX + RY + RZ$; $[T,X] = X$, $[T,Y] = -Y$, $[X,Y] = Z$ (oscillateur complètement résoluble), $f(\alpha,\beta) = \alpha T^* + \beta Z^*$ et $O(\alpha,\beta) = G\cdot f(\alpha,\beta)$ pour $\beta \neq 0$. On se donne $f = f(\alpha_0, \beta_0)$.

(i) Soit premièrement $\mathfrak{h} = RT + RX$. Alors

$$\mathrm{ind}_H^G\ \chi_f = \int_R \theta(O(\alpha_0,\beta))d\beta.$$

Au moyen de $\zeta = f(\alpha_0,\beta) \in O(\alpha_0,\beta) \cap (f + \mathfrak{h}^{\perp})$ et d'une polarisation $\mathfrak{b} = RT + RX + RZ$ en ζ, on construit $\pi(\alpha_0,\beta) = \mathrm{ind}_B^G\ \chi \simeq \bar{\theta}(O(\alpha_0,\beta))$. Dans cette situation, la façon usuelle propose $a(\beta)$ par $\langle a(\beta),\phi\rangle = \overline{\phi(e)}$, qui satisfait clairement aux condition requises. Comme $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} + RZ$ et que Z est un élément central,

$$(\mathcal{H}(\pi(\alpha_0,\beta))^{-\infty})^{H,\ \chi_f\Delta_{H,G}^{1/2}} = \mathbb{C}a(\beta).$$

Maintenant pour $\phi \in C_c^\infty(G)$, $\pi(\alpha_0,\beta)(\phi)a(\beta) = \phi_B^\zeta$ i.e,

$$(\pi(\alpha_0,\beta)(\phi)a(\beta))(g) = \int_B \phi(gb)\chi_\zeta(b)\Delta_{B,G}^{-1/2}(b)db,$$

par suite,

$$\langle \pi(\alpha_0,\beta)(\phi)a(\beta), a(\beta)\rangle = \int_B \phi(b)\chi_\zeta(b)\Delta_{B,G}^{-1/2}(b)db.$$

De tout ce qui précède,

$$(2\pi)^{-1}\int_R \langle \pi(\alpha_0,\beta)a(\beta), a(\beta)\rangle d\beta = (2\pi)^{-1}\int_R d\beta \int_R \phi_H{}^f(\exp wZ)\exp(i\beta w)dw = \phi_H{}^f(e).$$

(ii) Deuxièmement soit $\mathfrak{h} = RT + RZ$. Posons $\zeta = f(\alpha,\beta_0) = \alpha T^* + \beta_0 Z^*$, ce qui nous dit $(f(\alpha_0,\beta_0) + \mathfrak{h}^{\perp}) \cap O(\alpha,\beta_0) = \alpha_0 T^* + xX^* + yY^* + \beta_0 Z^*$; $xy = \beta_0(\alpha - \alpha_0)$. Si la valeur

$$(\exp(aX)\exp(bY)\cdot\zeta)(T) = (\exp(bY)\cdot\zeta)(T + aX) = \zeta(T + aX - bY + abZ) = \alpha + ab\beta_0$$

est égale à $f(T)$, il vient $\alpha + ab\beta_0 = \alpha_0$ i.e, $ab\beta_0 = \alpha_0 - \alpha$. En modifiant les bases par des scalaires convenables, on peut supposer que $\beta_0 = 1$. L'égalité obtenue ci-dessus devient $ab = \alpha_0 - \alpha$. Par conséquent, pour $f(\alpha,\beta_0)$ telle que $\alpha \neq \alpha_0$, $g_j \cdot f(\alpha,\beta_0) \in f + \mathfrak{h}^{\perp}$ $(j = 1,2)$ avec $g_1 = \exp(X)\exp((\alpha_0 - \alpha)Y)$, $g_2 = \exp(-X)\exp((\alpha - \alpha_0)Y)$. Pareillement au cas (i), on réalise la représentation $\pi(\alpha,\beta_0) = \mathrm{ind}_B^G\ \chi(\alpha,\beta_0) \simeq \bar{\theta}(O(\alpha,\beta_0))$. Pour $\phi \in \mathcal{H}(\pi(\alpha,\beta_0))^\infty$, nous rappelons la formule famillière;

$$\begin{aligned}\langle a_1(\alpha),\phi\rangle &= \oint_{H/H\cap g_1 B g_1^{-1}} \overline{\phi(hg_1)\chi_f(h)}\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)dh \\ &= \int_R \overline{\phi(\exp(tT)\exp(X))}\exp(-it\alpha_0)dt = \int_R \overline{\phi(\exp(e^tX)\exp(it(\alpha - \alpha_0))}e^{t/2}dt \\ &= \int_0^\infty \overline{\phi(\exp(sX))}s^{i(\alpha-\alpha_0)-1/2}ds.\end{aligned}$$

L'intégrand de ce dernier est bien intégrable et il est immédiat que

$$a_1(\alpha) \in (\mathcal{H}(\pi(\alpha,\beta_0))^{-\infty})^{H,\ \chi_f\Delta_{H,G}^{1/2}}.$$

De même la formule

$$\begin{aligned}\langle a_2(\alpha),\phi\rangle &= \oint_{H/H\cap g_2 B g_2^{-1}} \overline{\phi(hg_2)\chi_f(h)}\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)dh \\ &= \int_0^\infty \overline{\phi(\exp(-sX))}s^{i(\alpha-\alpha_0)-1/2}ds\end{aligned}$$

définit un élément non nul

$$a_2(\alpha) \in (\mathcal{H}(\pi(\alpha,\beta_0))^{-\infty})^{H,\ \chi_f\Delta_{H,G}^{1/2}}.$$

Soit a un élément quelconque de celui-ci. La semi-invariance de a par rapport à $h = \exp(tT)$, $t \in R$, nous donne

$$\langle \exp(it(\alpha_0 - \alpha))e^{-t/2}a, \phi(\exp(xX))\rangle = \langle a, \phi(\exp(e^t xX))\rangle,$$

car $\langle \pi(\alpha,\beta_0)(h)a, \phi \rangle = \langle a, \pi(\alpha,\beta_0)(h)^{-1}\phi \rangle = \langle a, \phi(h\exp(xX)) \rangle = \langle a, \exp(-i\alpha t)e^{t/2}\phi(\exp(xe^tX)) \rangle$. On en déduit que

$$\langle a, \phi \rangle = c_1 \int_{R_+} \phi(\exp(xX))x^{i(\alpha-\alpha_0)-1/2}dx \quad (c_1\text{:constante})$$

si supp $\phi \subset R_+ = \{s \in R;\ s > 0\}$, c'est-à-dire que $a = c_1a_1(\alpha)$ (c_1:constante) sur R_+. De même, $a = c_2a_2(\alpha)$ (c_2:constante) sur $R_- = -R_+$.

Supposons maintenant supp $a \subset B$, et écrivant

$$a = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j D_j, \text{ où } \langle D_j, \phi \rangle = (d^j\phi\hat{}/dx^j)(0),\ \phi\hat{}(x) = \phi(\exp(xX)).$$

Alors en considérant la semi-invariance de a pour $h = \exp(tT)$, on a

$$\exp(i\alpha_0t)\sum_{j=0}^{m}(d^j\phi\hat{})/(dx^j)(0) = \langle \pi(\alpha,\beta_0)(h)a, \phi\hat{} \rangle = \langle \sum_{j=0}^{m} \lambda_jD_j, \phi\hat{}(e^tx)e^{t/2}\exp(-i\alpha t) \rangle$$
$$= \sum \lambda_j(d^j\phi\hat{})/(dx^j)(0)e^{(j+1/2)t}\exp(i\alpha t).$$

Si l'on y choisit ϕ vérifiant $(d^j\phi\hat{})/(dx^j)(0) = \delta_{jm}$, il s'ensuit que

$$\lambda_m\exp(i\alpha_0t) = \lambda_me^{(m+1/2)t}\exp(i\alpha t) \quad (t \in R).$$

Ceci posé, on conclut que $\lambda_m = 0$, ce qui veut dire que $a = 0$.

En somme,

$$(H(\pi(\alpha,\beta_0))^{-\infty})^{H, \chi_f \Delta_{H,G}^{1/2}} = Ca_1 + Ca_2.$$

Passons à la formule de Plancherel concrète pour la représentation monomiale $\mathrm{ind}_H^G \chi_f$, $f = f(\alpha_0, \beta_0)$. Pour alléger les notations, $\pi(\alpha,\beta_0)$, examinée de près pour le moment, sera notée π. Soient $\psi \in C_c^\infty(G)$ et $\phi \in H(\pi)$ vecteur différentiable à support compact modulo B. On calcule; $a_j(\alpha)$ $(j = 1, 2)$ se notant simplement a_j,

$$\langle \pi(\psi)a_1, \phi \rangle = \langle a_1, \pi(\psi^*)(\phi) \rangle = \oint_{H/H\cap g_1Bg_1^{-1}} \overline{\pi(\psi^*)(\phi)(hg_1)\chi_f(h)}\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)dh$$
$$= \oint_{H/H\cap g_1Bg_1^{-1}} \overline{\chi_f(h)}\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)dh \int_G \psi(g)\overline{\phi(ghg_1)}dg$$
$$= \oint_{H/H\cap g_1Bg_1^{-1}} \overline{\chi_f(h)}\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)\Delta_G^{-1}(h)dh \int_G \psi(gg_1^{-1}h^{-1})\overline{\phi(g)}dg$$
$$= \oint_{H/H\cap g_1Bg_1^{-1}} \overline{\chi_f(h)}\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)\Delta_G^{-1}(h)dh \oint_{G/B} dg \int_B \psi(gbg_1^{-1}h^{-1})\overline{\phi(gb)}\Delta_{B,G}^{-1/2}(b)db$$
$$= \oint_{H/H\cap g_1Bg_1^{-1}} dh \oint_{G/B} dg \int_B \psi(gbg_1^{-1}h^{-1})\overline{\phi(g)}\Delta_{B,G}(b)\chi_\zeta(b)\overline{\chi_f(h)}\Delta_G^{-1}(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)db$$

$$\cdots \quad (1)$$

L'ordre des deux intégrales au dernier membre s'échange, ce qu'on va voir dans la suite. Remarquons tout d'abord $\Delta_G(h) = \Delta_{H,G}(h) = 1$ et qu'à l'expression (1) g se met comme $g = \exp(xX)$, x parcourant un certain intervalle fini J. On note $\Xi(h,g,b)$ l'intégrand dans (1) et écrit $h = \exp(tT)$, $b = \exp(sT)\exp(yY)\exp(wZ)$. Alors

$$\int_B \Xi(h,g,b)db = \phi\hat{}(x) \int_{R^3} \psi(\exp(xX)\exp(yY)\exp(wZ)\exp((\alpha-\alpha_0)Y)\exp(-X)\exp(-tT)) \times$$
$$\times e^{-s/2}\exp(i(w + \alpha s - \alpha_0t))dsdydw.$$

On y trouve

$$\exp(xX)\exp(sT)\exp(yY)\exp(wZ)\exp((\alpha-\alpha_0)Y)\exp(-X)\exp(-tT)$$
$$= \exp(xX)\exp(wZ)\exp(e^{-s}(y + \alpha - \alpha_0)Y)\exp(-e^sX)\exp((s-t)T)$$
$$= \exp((w + e^{-s}x(y + \alpha - \alpha_0))Z)\exp(e^{-s}(y + \alpha - \alpha_0)Y)\exp((x - e^s)X)\exp((s-t)T).$$

Compte tenu de cela,

$$\int_B \Xi(h,g,b)db \,|\leqq|\, \hat{\phi}(x) \,|\, \int_{\mathbf{R}^3} |\, \phi(\exp(wZ)\exp(e^{-s}yY)\exp((x-e^s)X)\times$$
$$\times\exp((s-t)T) \,|\, e^{-s/2}dsdydw$$
$$= |\, \hat{\phi}(x) \,|\, \int_{\mathbf{R}^3} |\, \phi(\exp(wZ)\exp(yY)\exp((x-e^s)X)\exp((s-t)T) \,|\, e^{-s/2}dsdydw$$
$$= |\, \hat{\phi}(x) \,|\, \int_{\mathbf{R}^3} |\, \phi(\exp(wZ)\exp(yY)\exp((x-e^{s+t})X)\exp(sT) \,|\, e^{(s+t)/2}dsdydw. \quad \cdots ②$$

Puisque x parcourt l'intervalle fini J, ② est intégrable relativement à t et l'on peut bien échanger l'ordre des deux premières intégrales, ce qu'on vient de chercher.

Nous arrivons ainsi à

$$\langle\pi(\phi)a_1,\phi\rangle = \oint_{G/H} dg \oint_{H/H\cap g_1 Bg_1^{-1}} dh \int_B \phi(gbg_1{}^{-1}h^{-1})\overline{\phi(g)}\Delta_{B,G}^{-1/2}(b)\chi_\zeta(b)\overline{\chi_f(h)}\times$$
$$\times\Delta_G^{-1}(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)db.$$

Donc

$$(\pi(\phi)a_1)(g) = \oint_{H/H\cap g_1 Bg_1^{-1}} dh \int_B \phi(gbg_1{}^{-1}h^{-1})\Delta_{B,G}^{-1/2}(b)\chi_\zeta(b)\overline{\chi_f(h)}\times$$
$$\times\Delta_G^{-1}(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)db$$
$$= \oint_{H/H\cap g_1 Bg_1^{-1}} \overline{\chi_f(h)}\Delta_G^{-1}(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)dh \oint_{B/B\cap g_1^{-1}Hg_1} db \int_{B\cap g_1^{-1}Hg_1} \phi(gbb_0g_1{}^{-1}h^{-1})\times$$
$$\times\Delta_{B,G}^{-1/2}(bb_0)\chi_\zeta(bb_0)\Delta_{B\cap g_1^{-1}Hg_1,B}(b_0)db$$
$$= \oint_{H/H\cap g_1 Bg_1^{-1}} dh \oint_{B/B\cap g_1^{-1}Hg_1} \overline{\chi_f(h)}\chi_\zeta(b)\Delta_G^{-1}(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(b)db\times$$
$$\times\int_{B\cap g_1^{-1}Hg_1} \phi(gbb_0{}^{-1}g_1{}^{-1}h^{-1})\Delta_{B,G}^{1/2}(b_0)\chi_\zeta(b_0)\Delta_{B\cap g_1^{-1}Hg_1,B}(b_0)\Delta_{B\cap g_1^{-1}Hg_1}(b_0)db_0.$$

Des arguments tout à fait analogues à ceux employés plus haut constatent que es deux premières intégrales sont échangeables. Finalement,

$$(\pi(\phi)a_1)(g) = \oint_{B/B\cap g_1^{-1}Hg_1} \chi_\zeta(b)\Delta_{B,G}^{-1/2}(b)db \oint_{H/H\cap g_1 Bg_1^{-1}} \overline{\chi_f(h)}\Delta_G^{-1}(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)dh\times$$
$$\times\int_{B\cap g_1^{-1}Hg_1} \phi(gbb_0{}^{-1}g_1{}^{-1}h^{-1})\overline{\chi_\zeta(b_0)}\Delta_{B,G}^{1/2}(b_0)\Delta_{B\cap g_1^{-1}Hg_1,B}(b_0)\Delta_{B\cap g_1^{-1}Hg_1}^{-1}(b_0)db_0,$$

dont la dernière intégrale est égale à

$$\int_{H\cap g_1 Bg_1^{-1}} \phi(gbg_1{}^{-1}b'^{-1}h^{-1})\overline{\chi_{g_1\cdot\zeta}(b')}\Delta_{g_1Bg_1^{-1},G}^{1/2}(b')\Delta_{g_1Bg_1^{-1}\cap H,g_1Bg_1^{-1}}(b')\times$$
$$\times\Delta_{g_1Bg_1^{-1}\cap H}^{-1}(b')db'.$$

Pourvu que l'égalité

$$\Delta_H^{1/2}(b')\Delta_{g_1Bg_1^{-1}\cap H}^{-1}(b') = \Delta_{g_1Bg_1^{-1}}^{-1/2}(b') \quad (\, b'\in g_1Bg_1{}^{-1}\cap H\,)$$

s'établisse, ce qui est aisé à constater dans notre cas, on aurait

$$\Delta_{g_1Bg_1^{-1},G}^{1/2}(b')\Delta_{g_1Bg_1^{-1}\cap H,g_1Bg_1^{-1}}(b')\Delta_{g_1Bg_1^{-1}\cap H}^{-1}(b')$$
$$= \Delta_H^{-1}(b')\Delta_{H,G}^{1/2}(b')\Delta_{g_1Bg_1^{-1}\cap H,H}^{-1}(b'),$$

et enfin

$$(\pi(\phi)a_1)(g) = \oint_{B/B\cap g_1^{-1}Hg_1} \Delta_{B,G}^{-1/2}(b)\chi_\zeta(b)db \int_H \phi(gbg_1{}^{-1}h)\chi_f(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)dh$$
$$= \oint_{B/B\cap g_2^{-1}Hg_2} \phi_H{}^f(gbg_1{}^{-1})\chi_\zeta(b)\Delta_{B,G}^{-1/2}(b)db.$$

De même façon,

$$(\pi(\phi)a_2)(g) = \oint_{B/B\cap g_2^{-1}Hg_2} \phi_H{}^f(gbg_2{}^{-1})\chi_\zeta(b)\Delta_{B,G}^{-1/2}(b)db.$$

De tout ce qui précède,

$$\langle\pi(\phi)a_1,a_1\rangle = \oint_{H/H\cap g_1 Bg_1^{-1}} \chi_\zeta(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h) \oint_{B/B\cap g_1^{-1}Hg_1} \phi_H{}^f(hg_1bg_1{}^{-1})\times$$

$$\times\chi_\zeta(b)\Delta_{B,G}^{-1/2}(b)db$$

$$= \int_R \exp(it(\alpha_0 - \alpha))e^{t/2}dt \int_{R^2} \phi_H{}^f(\exp(e^tX)\exp(xT)\exp(yY)\exp(-X))\exp(i\alpha x)\times$$
$$\times e^{-x/2}dxdy$$
$$= \int_R \exp(it(\alpha_0 - \alpha))e^{t/2}dt \int_{R^2} \phi_H{}^f(\exp(e^tX)\exp(ye^{-x}Y)\exp(-e^xX))\times$$
$$\times\exp(ix(\alpha - \alpha_0))e^{-x/2}dxdy$$
$$= \int_R \exp(it(\alpha_0 - \alpha))e^{t/2}dt \int_{R^2} \phi_H{}^f(\exp((e^t - e^x)X)\exp(ye^{-x}Y)e^{-iy}\times$$
$$\times\exp(ix(\alpha - \alpha_0))e^{-x/2}dxdy$$
$$= \int_R \exp(i(t - x)(\alpha_0 - \alpha))e^{(t+x)/2}dt \int_{R^2} \phi_H{}^f(\exp((e^t - e^x)X)\exp(yY))\times$$
$$\times\exp(-iye^x)dxdy.$$

En éffectuant le changement de variables $t \mapsto t + x$, $e^x = s$, on obtient

$$\langle\pi(\phi)a_1, a_1\rangle = \int_R \exp(it(\alpha_0 - \alpha))e^{t/2}dt \int_{R\times R_+} \phi_H{}^f(\exp(s(e^t - 1)X)\exp(yY))\times$$
$$\times e^{-iys}dyds.$$

D'une façon analogue,

$$\langle\pi(\phi)a_2, a_2\rangle = \oint_{H/H\cap g_2Bg_2^{-1}} \chi_f(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)dh \oint_{B/B\cap g_2^{-1}Hg_2} \phi_H{}^f(hg_2bg_2{}^{-1})\times$$
$$\times\chi_\zeta(b)\Delta_{B,G}^{-1/2}(b)db$$
$$= \int_R \exp(it(\alpha_0 - \alpha))e^{t/2}dt \int_{R^2} \phi_H{}^f(\exp(-e^tX)\exp(xT)\exp(yY)\exp(X))\times$$
$$\times\exp(i\alpha x)e^{-x/2}dxdy$$
$$= \int_R \exp(i(t - x)(\alpha_0 - \alpha))e^{(t+x)/2}dt \int_{R^2} \phi_H{}^f(\exp((e^x - e^t)X)\exp(yY))\times$$
$$\times\exp(iye^x)dxdy$$
$$= \int_R \exp(it(\alpha_0 - \alpha))e^{t/2}dt \int_{R\times R_+} \phi_H{}^f(\exp(s(1 - e^t)X)\exp(yY))e^{iys}dyds.$$

Ces calculs se terminent donc à

$$\langle\pi(\phi)a_1, a_1\rangle + \langle\pi(\phi)a_2, a_2\rangle$$
$$= \int_R \exp(it(\alpha_0 - \alpha))e^{t/2}dt \int_{R^2} \phi_H{}^f(\exp(s(1 - t)X)\exp(yY))e^{iys}dyds.$$

Si l'on y pose

$$\Psi(t) = \int_{R^2} \phi_H{}^f(\exp(s(1 - e^t)X)\exp(yY))e^{iys}dyds,$$

cette fonction est infiniment différentiable pour t non nulle car, dans ce cas, l'intégrale serait effectuée sur un compact. D'ailleur, la fonction $R^2 \ni (s,y) \mapsto \phi_H{}^f(\exp(sX)\exp(yY))$ appartenant à $C_c^\infty(R^2)$, dont on fait des L^1-approximations par des fonctions de la forme $\Sigma_j \xi_j(s)\eta_j(y)$ ($\xi_j, \eta_j \in C_c^\infty(R)$), pour un nombre positif ε quelconque, on peut choisir des ξ_j, η_j de telle manière que

$$|\,\Psi(t) - (2\pi)^{1/2}\Sigma_j \int_R \xi_j(s(1 - e^t))(\eta_j)^\wedge(s)ds\,| < \varepsilon$$

quel que soit $t \in R$, où $(\eta_j)^\wedge$ désigne la transformée de Fourier inverse de η_j. Compte tenu du fait que la limite, lorsque t tend vers zéro, de

$$\int_R \xi_j(s(1 - e^t))(\eta_j)^\wedge(s)ds$$

est égale à $(2\pi)^{1/2}\xi_j(0)\eta_j(0)$, $\Psi(t)$ est continue même en $t = 0$.

Nous considérons à la fin la fonction $e^{t/2}\Psi(t)$, lorsque $t \mapsto -\infty$, elle décroît rapidement grâce au facteur $e^{t/2}$. Examinons son comportement quand t tend vers $+\infty$. Un changement de variables mène à

$$e^{t/2}\Psi(t) = e^{t/2}(1 - e^{t})^{-1}\int_{R^2} \phi_{H}{}^{f}(\exp(sX)\exp(yY))\exp(iys(1 - e^{t})^{-1})dsdy,$$

et à

$$|e^{t/2}\Psi(t)| \leq e^{t/2}(1 - e^{t})^{-1}\int_{R^2} |\phi_{H}{}^{f}(\exp(sX)\exp(yY))| dsdy,$$

ce qui prouve que $e^{t/2}\Psi(t)$ est à décroissance rapide, t tendant vers $+\infty$.

Il en découle que la formule d'inversion de Fourier peut nous amener à la notre formule de Plancherel concrète pour la représentation monomiale $\tau = \mathrm{ind}_{H}^{G}\chi_{f}$:

$$(2\pi)^{-2}\int_{R} (\langle\pi(\phi)a_1(\alpha),a_1(\alpha)\rangle + \langle\pi(\phi)a_2(\alpha),a_2(\alpha)\rangle)d\alpha$$
$$= (2\pi)^{-1}\int_{R} \phi_{H}{}^{f}(\exp(yY))e^{iys}dsdy = \phi_{H}{}^{f}(e).$$

Bibliographie

[1] L.Auslander and C.C.Moore, Unitary representations of solvable Lie groups, Mem. Amer. Math. Soc. No 62, 1966.

[2] Y.Benoist, Analyse harmonique sur les espaces symétriques nilpotents, J. Func. Anal., 59(1984), 211-253.

[3] Y.Benoist, Multiplicité un pour les espaces symétriques exponentiels, Mém. Soc. Math. France, 15(1984), 1-37.

[4] P.Bernat et al., Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod, Paris 1972.

[5] P.Bonnet, Transformation de Fourier des distributions de type positif sur un groupe de Lie unimodulaire, J. Func. Anal., 55(1984), 220-246.

[6] L.Corwin, F.P.Greenleaf and G.Grélaud, Direct integral decompositions and multiplicities for induced representations of nilpotent Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc., 304(1987), 549-583.

[7] L.Corwin and F.P.Greenleaf, Spectrum and multiplicities for restrictions of unitary representations in nilpotent Lie groups, Pacific J. Math., 135(1988), 233-267.

[8] H.Fujiwara, Représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents, Pacific J. Math., 127(1987), 329-352.

[9] H.Fujiwara et S.Yamagami, Certaines représentations monomiales d'un groupe de Lie résoluble exponentiel, Advanced Studies in Pure Math., 14(1988), 153-190.

[10] H.Fujiwara, Représentations monomiales des groupes de Lie résolubles expon-

entiels, à paraître.

[11] H. Fujiwara, Sur les restrictions des représentations unitaires des groupes de Lie résolubles exponentiels, à paraître.

[12] G. Grélaud, Désintégration des représentations induites des groupes de Lie résolubles exponentiels, Thèse de 3^e cycle, Univ. de Poitiers, 1973.

[13] G. Grélaud, Sur les représentations des groupes de Lie résolubles, Thèse, Univ. de Poitiers, 1984.

[14] A. A. Kirillov, Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, Uspekhi Mat. Nauk, 17(1962), 57-110.

[15] R. Lipsman, Orbital parameters for induced and restricted representations, à paraître dans Trans. Amer. Math..

[16] R. Lipsman, Harmonic analysis on exponential solvable homogeneous spaces: The algebraic or symmetric cases, à paraître.

[17] R. Lipsman, Induced representations of completely solvable Lie groups, à paraître.

[18] R. Lipsman, Restricting representations of completely solvable Lie groups, à paraître.

[19] G. W. Mackey, Induced representations of locally compact groups II: the Frobenius Reciprocity Theorem. Annals of Math., 58(1953), 193-221.

[20] G. W. Mackey, The Theory of Unitary Group Representations, Chicago Lectures in Math., 1976.

[21] R. Penney, Abstract Plancherel theorems and a Frobenius reciprocity theorem, J. Func. Anal., 18(1975), 177-190.

[22] S. R. Quint, Decomposition of induced representations of solvable exponential Lie groups, Dissertation, Univ. of California, Berkeley, 1973.

[23] O. Takenouchi, Sur la facteur-représentation d'un groupe de Lie résoluble de type (E), Math. J. Okayama Univ., 7(1957), 151-161.

[24] M. Vergne, Étude de certaines représentations induites d'un groupe de Lie résoluble exponentiel, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 3(1970), 353-384.